# Gravitación y dimensiones extra

**Antonio Dobado y Antonio L. Maroto**

*La idea de que pueden existir dimensiones extra aparte de las tres espaciales y la temporal es tan antigua como la Relatividad General de Albert Einstein. En este artículo se describe brevemente el origen y la evolución de esta idea y el papel que las dimensiones extra juegan y podrán jugar en la física moderna.*

## 1. Un poco de historia

Desde nuestra experiencia cotidiana resulta difícil refutar la observación hecha por Aristóteles alrededor del año 350 a.C. acerca del número de dimensiones del espacio: "... *la línea tiene magnitud en una dirección, el plano en dos direcciones y el sólido en tres direcciones, y aparte de éstas, no hay ninguna otra magnitud porque las tres son todas ...*". Más aún, la existencia de dimensiones extra podría tener consecuencias desastrosas para la estabilidad de las órbitas atómicas y planetarias, sobre todo en el caso de que dichas dimensiones fuesen de un tamaño comparable al del sistema estudiado. En concreto, Paul Ehrenfest en 1917 demostró que la ley del inverso del cuadrado de la distancia para la fuerza electrostática o gravitatoria se modificaría si hubiera $n$ dimensiones espaciales extra, de forma que $F \propto r^{-2-n}$. De hecho, ningún experimento físico realizado hasta la fecha ha revelado la existencia de más de tres dimensiones espaciales, y dicho sea de paso, tampoco de más de una dimensión temporal.

Sin embargo, aunque la experiencia ordinaria no necesite de más de 3+1 dimensiones, desde un punto de vista matemático es posible estudiar de forma consistente la geometría de espacios de dimensión arbitraria. Esto se lo debemos en gran parte a los trabajos de Bernhard Riemann sobre variedades $n$-dimensionales (1854), y ello a pesar de que Ptolomeo propusiera una "demostración" de que una cuarta dimensión espacial no tiene magnitud ni definición posibles, (*Tratado sobre la distancia*, 150 a.C.).

La formulación de la Relatividad Especial de Einstein en 1905 supuso una revolución en nuestra concepción del espacio y del tiempo, y planteó la cuestión de la dimensionalidad desde una perspectiva completamente nueva. En efecto, en la interpretación geométrica que llevó a cabo Hermann Minkowski en 1909, la teoría de Einstein podía entenderse de forma simple en términos de una variedad espacio-temporal de cuatro dimensiones, en la que a las tres dimensiones espaciales se les añadía en pie de igualdad una cuarta, el tiempo, en la forma *ict*. El espacio y el tiempo pasaron de entenderse como conceptos independientes a formar un entramado único 4-dimensional, en el que las distancias se miden a través de la métrica de Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Por su parte, Einstein, lejos de considerar el espacio-tiempo de Minkowski como una mera descripción matemática, lo elevó a la categoría de entidad física con su Teoría General de Relatividad (RG) de 1915 al considerarlo como objeto dinámico, cuya geometría, dada por una métrica $g_{\mu\nu}(x)$, depende en cada punto de su contenido de materia y energía. La curvatura del espacio-tiempo determina la trayectoria de las partículas de prueba que se mueven en él y por tanto, la teoría proporciona una interpretación geométrica de la interacción gravitatoria.

## 2. La unificación del electromagnetismo y la gravitación: las primeras teorías con dimensiones extra

Nos encontramos por tanto con que a comienzos del siglo pasado, nuestro conocimiento de las interacciones fundamentales se reducía a dos teorías de campos bien establecidas, el electromagnetismo de Maxwell, en pie desde 1873, y la novedosa Teoría General de la Relatividad para la gravitación. No es por tanto de extrañar que el atractivo de la teoría de Einstein provocara en muchos, incluido el propio Einstein, el impulso de buscar una generalización de la misma, que incluyera también a la teoría de Maxwell, en una descripción geométrica unificada. Con este único objetivo se tomaron varios caminos que, si bien no llegaron al destino deseado, permitieron realizar descubrimientos trascendentales que marcarían la evolución de la Física Teórica hasta nuestros días.

El primero de estos caminos fue propuesto por Hermann Weyl en 1918. En la RG el espacio-tiempo se considera como una variedad pseudo-Riemanniana métrica, esto es, en la que, aunque la orientación de un vector transportado paralelamente de un punto a otro depende del camino seguido, su norma es independiente del transporte. Esta independencia de la norma disgustaba a Weyl que propuso reemplazar el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ por una clase de métricas conformemente equivalentes $[g_{\mu\nu}]$ (esto es, equivalentes bajo cambios de escala $g_{\mu\nu} \to \lambda g_{\mu\nu}$), y el transporte paralelo por otro que respetara esa estructura conforme. Esto se conseguía introduciendo un nuevo campo $A_\mu$, que al cambiar de respresentante de la clase de equivalencia $[g_{\mu\nu}]$, se transformaba precisamente como el potencial vector de la teoría de Maxwell ($A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda$). Este tipo de transformación es lo que Weyl denominó transformación de "gauge", en el sentido de cambio de longitud. En las propias palabras de Weyl en una carta dirigida a Einstein en 1918, con su teoría había conseguido "*...derivar la electricidad y la gravitación de una fuente común...*". La respuesta de Einstein no se hizo esperar:

"*Aunque su idea es muy elegante, tengo que declarar francamente que, en mi opinión, es imposible que la teoría se corresponda con la naturaleza.*". La objeción de Einstein se basaba en el hecho de que en la propuesta de Weyl el ritmo de avance de los relojes también dependería del camino seguido por éstos, lo cual entraría en contradicción, por ejemplo, con la estabilidad de los espectros atómicos.

Aunque la teoría de Weyl fue abandonada rápidamente, en ella se introducía por primera vez el concepto de simetría gauge. Varias décadas más tarde, con el desarrollo de las teorías gauge no abelianas por Yang y Mills (1954), y del Modelo Estándar de las partículas elementales, se comprobó que la misma noción de invariancia gauge subyacía en la descripción del resto de interacciones fundamentales (electrodébiles y fuertes).

El segundo camino en la búsqueda de la unificación comenzó un año antes de la publicación de la RG. En 1914 Gunnar Nordström propuso una teoría en cinco dimensiones que unificaba el electromagnetismo con la gravitación de Newton. La aparición de la RG hizo olvidar la teoría de Nordström, pero no la idea de la unificación a través de dimensiones extra.

**Figura 1.** Theodor Kaluza (izquierda) y Oskar Klein (derecha) introdujeron una dimensión adicional para tratar de unificar la gravitación y el electromagnetismo a partir de la Teoría General de la Relatividad de Albert Einstein

## 2.1. La teoría de Kaluza en cinco dimensiones

En 1919 Einstein recibió un trabajo de Theodor Kaluza, un *privatdozent*[1] en la universidad de Königsberg, en el que extendía la RG a cinco dimensiones. Kaluza consideraba un espacio con cuatro dimensiones, más la correspondiente dimensión temporal y suponía que la métrica del espacio-tiempo se podía escribir como:

$$g^{(5)}_{MN} = \begin{pmatrix} g^{(4)}_{\mu\nu} & \alpha A_\mu \\ \alpha A_\nu & 2\phi \end{pmatrix} \qquad (2)$$

donde $g^{(4)}_{\mu\nu}$ con $\mu$, $\nu$ =1,2,3,4, corresponde a la métrica 4-dimensional del espacio-tiempo de la RG, $A_\mu$ proporciona el campo electromagnético, $\phi$ es un campo escalar conocido posteriormente como dilatón y $\alpha = \sqrt{2\kappa}$ es la constante de acoplo relacionada con la constante de Newton $\kappa$. Kaluza demostró que las ecuaciones de Einstein en cinco dimensiones obtenidas de esta métrica y linealizadas para los campos, se reducían a las ecuaciones de Einstein ordinarias (en cuatro dimensiones) en vacío, junto con las ecuaciones de Maxwell para $A_\mu$, siempre que se impusiera la *condición cilíndrica*, esto es, que la métrica $g^{(5)}_{MN}$ no dependiera de la quinta coordenada.

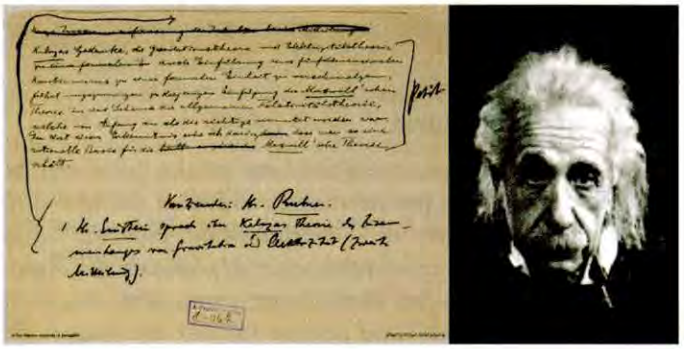

**Figura 2.** *Kaluzas Gedanke, die Gravitationstheorie und Elektrizitätstheorie durch Einführung eines fünfdimensionalen Kontinuums zu einer Einheit zu verschmelzen, führt ungezwungen zu derjenigen Einführung der Maxwellschen Theorie in das Schema der Relativitätstheorie, welche von Anfang anals die richtige vermutet worden war. Den Wert dieser Erkenntnis sehe ich darin, dass man so eine rationelle Basis für die Maxwellsche Theorie erhält.*

La concepción de Kaluza de fundir en una unidad las teorías de la gravitación y la electricidad introduciendo un continuo pentadimensional, conduce sin esfuerzo al acomodo de la teoría Maxwelliana en el esquema de la teoría de la Relatividad, que desde el principio sospechamos era correcta. Yo juzgo que el valor de esta comprensión está en la obtención de una base lógica para la teoría Maxwelliana. (Fragmento de manuscrito de Albert Einstein transcrito y traducido por **Katja Waidelich**).

La idea de Kaluza impresionó muy positivamente a Einstein: "*Nunca habría caído en la cuenta de lograr una teoría unificada por medio de un cilindro de cinco dimensiones... A primera vista, su idea me gusta enormemente...*" (carta de Einstein a Kaluza en Abril de 1919). Esta afirmación resulta sorprendente considerando que el trabajo de Nordström fue publicado cinco años antes. Por motivos desconocidos, en Mayo de 1919, Einstein rebajó su entusiasmo inicial: " *Respeto en gran medida la belleza y lo atrevido de su idea, pero comprenderá que a la vista de las objeciones actuales no pueda tomar parte como originalmente se planeó*". Einstein retuvo el trabajo de Kaluza durante dos años, hasta que en 1921 fue presentado por él mismo ante la Academia Prusiana. Hasta 1926 Einstein guardó silencio acerca de la teoría en cinco dimensiones.

## 2.2. La compactificación de Klein

Ese año, Oskar Klein publica un trabajo sobre la relación entre la teoría cuántica y la relatividad en cinco dimensiones. Uno de los principales defectos del modelo de Kaluza era la interpretación física de la quinta dimensión. La condición cilíndrica impuesta *ad hoc* hacía que ningún campo depen-

[1]Profesor formalmente sin plaza y que no recibía ningún salario de la universidad, salvo los honorarios por las clases impartidas. Kaluza mantuvo su posición (y sus escasos ingresos) durante 20 años, hasta que en 1929 consiguió una plaza de profesor en la universidad de Kiel.

diera de la dimensión extra, pero no se justificaba de manera alguna. Klein propuso que los campos podrían depender de ella, pero que ésta tendría la topología de un círculo con un radio muy pequeño, lo cual garantizaría la cuantización de la carga eléctrica. Su diminuto tamaño, $R_5 \cong 8 \times 10^{-31}$ cm, cercano a la longitud de Planck, explicaría el hecho de que la dimensión extra no se observe en los experimentos ordinarios, y en particular, garantiza que la ley del inverso del cuadrado se cumpla para distancias $r \gg R_5$. Pero además, la condición de periodicidad implica que existe una isometría de la métrica bajo traslaciones en la quinta dimensión, cuyo grupo, $U(1)$, coincide con el grupo de simetría gauge del electromagnetismo. Por último, imponiendo que el dilatón es una constante, Klein demostró que las ecuaciones de movimiento reproducen las ecuaciones completas de Einstein y Maxwell. Esta forma de tratar la dimensión extra, bautizada posteriormente como *el paradigma de la compactificación*, había logrado superar los obstáculos iniciales: "*... parece que la unión de la gravitación y la teoría de Maxwell se consigue de una forma completamente satisfactoria con la teoría en cinco dimensiones*" (carta de Einstein a Lorentz en 1927), y de hecho, ha sido la única forma consistente de introducir dimensiones extra hasta fechas muy recientes.

El propio Einstein había comenzado a trabajar en la teoría de Kaluza con su ayudante Jacob Grommer y en 1922 publicó un primer trabajo sobre existencia de soluciones esféricamente simétricas, con resultado negativo. Más tarde, en 1927 presentó ante la Academia Prusiana dos trabajos en los que reobtenía los resultados de Klein. Su infructuosa búsqueda de una teoría de campo unificada le haría volver cada pocos años a la teoría en cinco dimensiones durante el resto de su vida.

Los resultados de Klein sobre la cuantización de la carga eléctrica pueden entenderse fácilmente considerando el desarollo en modos de Fourier de los campos con respecto a la dimensión periódica:

$$\psi(x,x^5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_5}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\, e^{inx^5/R_5} \qquad (3)$$

La ecuación de ondas en cinco dimensiones puede reescribirse como:

$$\left( D^\mu D_\mu - \frac{n^2}{R_5^2} \right) \psi_n = 0 \qquad (4)$$

donde $D_\mu$ es una derivada covariante con respecto a transformaciones generales de coordenadas y con respecto a transformaciones gauge con una carga $q_n = n\kappa/R_5$. Vemos por tanto que el campo en cinco dimensiones se descompone en una torre infinita de modos 4-dimensionales $\psi_n(x)$ con masas $m_n^2 = n^2/R_5^2$, en unidades naturales $\hbar = c = 1$, y carga $q_n$ (modos Kaluza-Klein). Puesto que el radio de compactificación es tan pequeño, el valor típico de las masas será muy elevado, cercano a la masa de Planck $M_P = \kappa^{-1/2} = 1.2 \times 10^{19}$ GeV y por tanto, a las energías accesibles hoy día (y previsiblemente en un futuro próximo), únicamente el modo cero $n = 0$ será relevante. Esto plantea un serio problema para la teoría, pues no contendría partículas ligeras cargadas como las que conocemos.

### 2.3. Teorías de Kaluza-Klein en dimensiones superiores y la unificación de todas las interacciones

La descripción de las interacciones débiles y fuertes a través de teorías gauge no abelianas mostró las limitaciones de los modelos en cinco dimensiones, pues éstas requerían grupos de simetría mayores que el del electromagnetismo. En 1964 Bryce DeWitt presentó el primer modelo de tipo Kaluza-Klein-Yang-Mills en el que el espacio extra contenía más de una dimensión. El siguiente paso sería construir un modelo cuyo grupo de isometrías contuviese al del Modelo Estándar $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, y que unificara por tanto la gravitación con el resto de interacciones. Edward Witten demostró en 1981 que el número total de dimensiones que se necesitaría sería al menos once. Sin embargo, se pudo comprobar que la extensión de la teoría a once dimensiones no podía contener fermiones quirales, y por tanto sería incapaz de describir los campos de leptones y quarks.

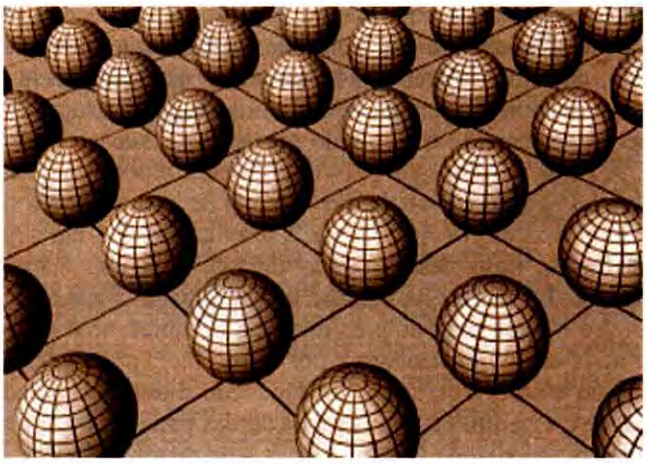

**Figura 3.** Imagen esquemática de la geometría de un espacio-tiempo multidimensional. El plano representa el espacio-tiempo ordinario 3+1 dimensional. Las esferas situadas en cada punto de este plano representan las dimensiones espaciales extra compactificadas.

Por otra parte la supersimetría implica que por cada bosón existe un fermión con las mismas propiedades. La extensión supersimétrica de la RG es lo que se conoce como *supergravedad* (supersimetría local). Unos años antes, en 1978, Cremmer, Julia y Scherk habían encontrado que la supergravedad, precisamente en once dimensiones, tenía propiedades de unicidad que no se encontraban en otras dimensiones. A pesar de ello, la teoría no contenía fermiones quirales, como los que conocemos, cuando se compactificaba en cuatro dimensiones. Estos problemas llevaron a una parte importante de los teóricos al estudio de otro programa de unificación a través de dimensiones extra aún más ambicioso, la teoría de cuerdas.

## 3. Las dos revoluciones de las supercuerdas

### 3.1. Primera revolución

El origen de la teoría de supercuerdas data de 1968 cuando Gabriele Veneziano introdujo los modelos duales en un intento de describir las amplitudes de interacción hadrónicas que en aquellos tiempos no parecían provenir de ninguna

teoría cuántica de campos del tipo de la Electrodinámica Cuántica. Posteriormente, en 1979, Yoichiro Nambu, Leonard Susskind y Holger Nielsen demostraron de forma independiente que las amplitudes duales podían obtenerse como resultado de la dinámica de objetos unidimensionales cuánticos y relativistas dando comienzo a la teoría de cuerdas. En 1971 Pierre Ramond, André Neveu y John Schwarz desarrollaron una teoría de cuerdas con fermiones y bosones que resultó ser supersimétrica inaugurando de esta forma la era de las supercuerdas.

Sin embargo, en 1973 David Gross, David Politzer y Frank Wilczek descubrieron que la Cromodinámica Cuántica, que es una teoría de campos gauge no abeliana basada en el grupo de color $SU(3)_C$, que describe las interacciones fuertes en términos de quarks y gluones, poseía la propiedad de la libertad asintótica. Esto significaba que a grandes energías los quarks eran esencialmente libres mientras que a bajas energías se encontraban confinados dentro de los hadrones. Dicho descubrimiento, que fue recompensado con la concesión del Premio Nobel de Física a sus autores en 2004, desvió el interés de la comunidad científica hacia la Cromodinámica Cuántica como teoría de las interacciones fuertes, relegando casi al olvido a la teoría de (super)cuerdas.

A pesar de todo, en 1974 Joel Scherk y John Schwarz hicieron la observación de que la teoría de cuerdas podía ser también una teoría cuántica de la gravitación. Sin embargo este hecho pasó desapercibido durante casi una década. Además, las teorías de cuerdas tenían extrañas propiedadades. Su versión más simple, la cuerda bosónica, sólo estaba definida en 26 dimensiones y por si esto fuera poco, presentaba un estado taquiónico, es decir con masa al cuadrado negativa. Por otra parte, las supercuerdas parecían estar plagadas de anomalías (obstrucciones a la cuantización de la teoría) que hacían altamente improbable que se les pudiera dar alguna aplicación útil para la física fundamental.

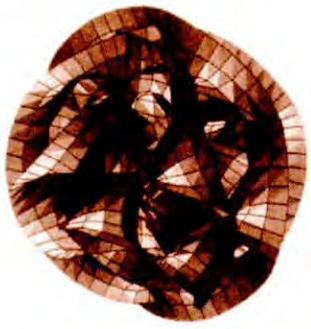

**Figura 4.** Representación pictórica de una variedad Calabi-Yau que ha sido propuesta como una posible compactificación de las seis dimensiones extra que aparecen en la teoría de supercuerdas.

Todo cambió sin embargo cuando en 1984 Michael Green y John Schwarz demostraron que las teorías de supercuerdas cerradas basadas en los grupos $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$ estaban libres de anomalías si se definían en un espaciotiempo de 10 dimensiones. Ese mismo año Gross, Harvey, Martinec y Rohm encontraron otro tipo de teorías de cuerdas consistentes denominadas heteróticas. Como resultado de esos y otros muchos trabajos emergieron cinco teorías de cuerdas consistentes denominadas tipo I, tipo IIA, tipo IIB, heterótica $SO(32)$ (HO) y heterótica $E_8 \times E_8$ (HE). Todas eran consistentes exclusivamente en 10 dimensiones y estaban libres de taquiones. La posibilidad de construir teorías *realistas* de las interacciones entre partículas fundamentales (incluyendo la gravitación) a partir de la teoría de supercuerdas surgió del trabajo seminal de Candelas, Strominger, Horowitz y Witten de 1985 donde se proponía el uso de la supercuerda heterótica $E_8 \times E_8$ y la compactificación de las 6 dimensiones extra para dar lugar a espacios de Calabi-Yau (un tipo especial de variedades compactas con tres dimensiones complejas). La idea era que mediante la elección apropiada de la variedad compactificada, el límite de la teoría a bajas energías sería similar al Modelo Estándar definido en las cuatro dimensiones ordinarias; es decir la teoría cuántica de campos actualmente aceptada como la teoría correcta de las interacciones fuertes y electrodébiles basada en el grupo gauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, que incluye la Cromodinámica Cuántica (grupo de color $SU(3)_C$) y la teoría de las interacciones electrodébiles basada en el grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$, desarrollada en 1967 por Steven Weinberg, Adbus Salam y Sheldon Glashow y por la que se les concedió el Premio Nobel de Física en 1979. De esta forma durante los años ochenta se estudiaron con gran detalle numerosos espacios compactificados $B$ de dimensión 6, tipo Calabi-Yau, junto con otros espacios como por ejemplo los llamados orbifoldios (variedades diferenciables cocientadas por grupos discretos) en un intento de tomar contacto con la fenomenología de *bajas* energías accesibles a los experimentos actuales. Además, las posibilidades podían aumentarse incluyendo campos gauge que podían estar definidos sobre $B$, dando lugar a diferentes líneas de flujo que se enrollarían y enlazarían de infinidad de formas dentro de $B$, sacando partido de su habitualmente intrincada topología.

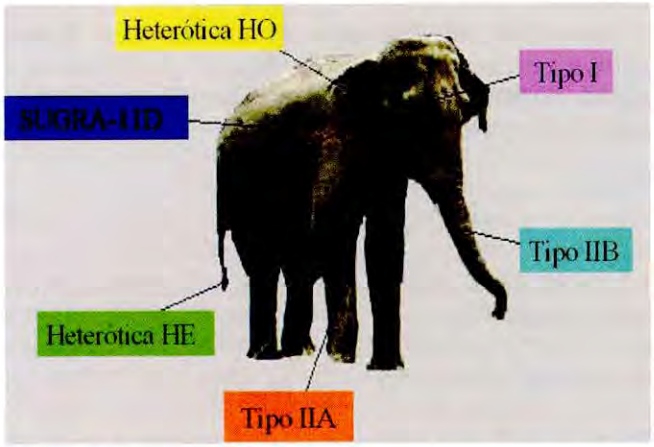


**Figura 5.** La supuesta teoría M, representada aquí por un elefante, pretende contener como casos particulares las cinco teorías de cuerdas conocidas y la supergravedad en 11 dimensiones. El elefante hace referencia al antiguo cuento en el que un grupo de personas tocan las diferentes partes de un ser desconocido en la oscuridad (trompa, patas, colmillos, orejas, rabo), intentando vanamente adivinar de qué tipo de criatura se trata.

En todo caso el tamaño típico del espacio $B$ era del orden de la longitud de Planck $l_P = 1.6 \times 10^{-33}$ cm que en unidades naturales es la inversa de la masa de Planck $M_P$. Este hecho situaba fuera de las posibilidades reales el estudio experimental de sus propiedades. Además a cada espacio $B$, ataviado de sus líneas de flujo, correspondería un posible vacío

(estado fundamental o de menor energía) de la teoría. Sin embargo, en la medida que ésta sólo se podía determinar perturbativamente, es decir en el régimen de interacción débil, no era posible seleccionar el verdadero vacío de la teoría a partir de primeros principios, sino tan sólo buscar aquéllos que podrían tener más posibilidades de establecer contacto con el mundo que observamos a nuestro alrededor.

### 3.2. Segunda revolución y la teoría M

Las cosas continuaron de esta forma hasta que ya en la década de los noventa se produjo la llamada *segunda revolución de las cuerdas* (la primera fue la de los ochenta). Este nuevo impulso en la teoría vino caracterizado por una serie de avances que cambiaron radicalmente nuestra imagen de la misma. El primero de estos avances fue el descubrimiento de las llamadas dualidades entre diferentes teorías de cuerdas. La más simple de ellas es la llamada dualidad $T$. En una teoría de cuerdas en la que una de las dimensiones está compactificada en un círculo de radio $R$, aparte de los modos Kaluza-Klein, tenemos también los estados correspondientes a que la cuerda esté enrollada $n$ veces en torno a este círculo (modos de enrollamiento). Entonces es muy fácil comprobar que existe otro radio de compactificación $R^*$ tal que el espectro de la cuerda es exactamente el mismo que el original, a condición de intercambiar los papeles de los modos Kaluza-Klein y los modos de enrollamiento. Además se puede probar que esta equivalencia se satisface a todos los órdenes de la teoría de perturbaciones. Otra dualidad, la llamada dualidad $S$, permite relacionar el régimen de interacción débil (perturbativo) de una cierta teoría de cuerdas con el régimen de interacción fuerte (no perturbativo) de otra. Esta dualidad abre por tanto la puerta al estudio de la dinámica de las cuerdas más allá de la teoría de perturbaciones. Posteriormente se descubrieron otros tipos de dualidades más sofisticadas que permitieron generar toda una red de conexiones entre las cinco diferentes teorías de cuerdas conocidas, tanto en el régimen de interacción débil como en el fuerte.

Otro revolucionario avance en la teoría de cuerdas fue el descubrimiento en 1995 por parte de Joseph Polchinski de las llamadas $p$-D-branas o simplemente D-branas (de la palabra *membrana*). Estos objetos de dimensión $p$ pueden entenderse como los T duales de cuerdas abiertas con condiciones de contorno de Dirichlet en sus extremos. La cuerdas abiertas tienen sus extremos sobre estas D-branas. La introducción de las branas en la teoría de cuerdas permitió, mediante el uso de las dualidades, describir una infinidad de nuevos estados de la teoría que no eran accesibles perturbativamente.

Finalmente Edward Witten observó que en las teorías de tipo IIA aparecen unos estados formados por $n$ D-branas con $p = 0$ cuya masa $M_n$ es proporcional a $n$ e inversamente proporcional a la constante de acoplo $g$. Este tipo de espectro puede reinterpretarse como una torre de modos Kaluza-Klein correspondientes a una teoría definida en un espacio-tiempo de once dimensiones, con la undécima dimensión compactificada en un círculo de radio $R$ proporcional a $g$. En el límite de interacción fuerte, $g$ y por tanto $R$ tienden a infinito, lo cual puede interpretarse como un despliegue de la nueva dimensión compactificada. Por tanto la conclusión es que en el régimen de acoplamiento fuerte la teoría de cuerdas está definida en 11 dimensiones en lugar de 10. La teoría de perturbaciones que se corresponde con un desarrollo en torno al punto $g = 0$ es completamente insensible a la undécima dimensión y por eso hasta entonces su existencia había pasado completamente desapercibida.

La emergencia de esta nueva dimensión, el conjunto de las relaciones de dualidad mencionadas, así como otras razones llevaron entonces a establecer la conjetura de la existencia de una teoría fundamental, denominada teoría M (de Madre, de Matriz, en el sentido matemático del término, de Mágica, Misteriosa, Monstruo, Maravillosa o tal vez de Membrana) definida en 11 dimensiones de la que, en el régimen de acoplamiento débil, emergerían las diferentes teorías de cuerdas conocidas. Además el límite de baja energía de esta teoría M sería la ya mencionada supergravedad en 11 dimensiones. En cualquier caso se carece hoy en día de una formulación apropiada de la teoría M y por tanto sus predicciones se realizan siempre de manera indirecta o circunstancial.

## 4. El paisaje de la teoría M y el Universo arborescente

Cabe preguntarse cuál puede ser el estado fundamental de esta supuesta teoría M de cara a determinar cuáles son las leyes de la naturaleza que observamos y que se corresponderían con el comportamiento de bajas energías de dicha teoría. El problema sigue siendo que existen infinidad de posibles vacíos caracterizados por la topología de la variedad formada por las dimensiones compactificadas $B$, las líneas de flujo de los diferentes campos gauge y también ahora por las diferentes $p$-branas que puedan envolver $B$ de multitud de formas según su dimensionalidad y la topología de $B$. Existen en la literatura estimaciones que cifran en algo del orden de $10^{150}$ el número de estados $S$ estables de este tipo. Cada uno de ellos tendría una cierta energía $E(S)$. Cada estado $S$ dependerá de un cierto número (en principio indeterminado) de parámetros que reciben el nombre genérico de *moduli* (por ejemplo el valor esperado de un cierto campo como el dilatón que determine el tamaño de $B$). Así la función energía estaría definida sobre el espacio de *moduli*, o si se quiere, sobre el conjunto de los vacíos putativos generando lo que Susskind ha llamado el paisaje de la teoría de cuer-

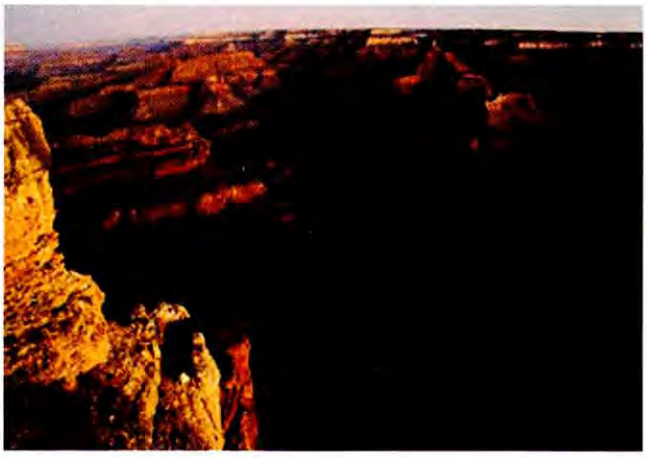

**Figura 6.** Representación bidimensional alegórica simplificada del paisaje del espacio de moduli de la teoría M (Borde Norte del Gran Cañón).

das (*string theory landscape*), pues si el espacio de *moduli* fuera bidimensional la función energía generaría una superficie del estilo de la representada en la figura 6. En realidad el espacio de *moduli* tiene una dimensión mucho más grande y el paisaje de la teoría M está prácticamente sin explorar. Es por tanto imposible hoy por hoy determinar qué estado $S$ minimiza la energía y es por tanto el verdadero estado fundamental de la teoría.

Aunque este escenario puede parecer desalentador, una nueva interpretación del significado físico del *landscape* de la teoría M ha sido propuesto recientemente por Joseph Polchiski y Raphael Bousso. La idea es que en diferentes regiones del universo es posible tener diferentes vacíos $S$. Estos vacíos pueden ir cambiando con el tiempo, bien descendiendo las laderas del *landscape* de forma clásica, es decir continua, o bien atravesando cordilleras mediante efecto túnel cuántico, siempre en busca de estados de menor energía. Eventualmente alguno de estos vacíos puede corresponder con una situación en la que la constante cosmológica sea positiva y por tanto la correspondiente región del espacio sufrirá una expansión tipo de Sitter de acuerdo con las ecuaciones de la Relatividad General. Dicha expansión no sólo producirá un incremento explosivo del tamaño de esta región del espacio, sino que además producirá la desconexión causal de la misma del resto del universo. Este fenómeno puede repetirse muchas veces sucesivas en muchos lugares y tiempos diferentes, dando lugar a un universo en continua evolución de naturaleza arborescente o más bien tipo pólipo, (nótese que también habría regiones donde se produzcan implosiones y colapsos por darse constantes cosmológicas negativas). En realidad una idea similar fue propuesta por Andrei Linde hace años en el contexto de la inflación dando lugar al escenario denominado inflación caótica. Cada región del espacio desconectada de las demás corresponderá a un cierto estado $S$ y por tanto las leyes de la física a baja energía serán diferentes. Esto en particular incluye los valores de muchas constantes, como por ejemplo el espectro de masas de las partículas elementales, las constantes de acoplo de la diferentes interacciones, la constante de Newton efectiva, etc. Nuestro universo observable correspondería a una parte muy pequeña de una de estas regiones en expansión, con una energía de vacío (o constante cosmológica) ligeramente positiva.

Si esta visión de la evolución del universo es apropiada, es obvio que la teoría M no tendría carácter predictivo, al menos en lo que a la explicación de las propiedades básicas del universo observable se refiere. La únicas explicaciones que pueden darse deben ser necesariamente de carácter antrópico. Por ejemplo la constante cosmológica tiene el valor que tiene por que si fuera mucho más grande o mucho más pequeña no se habrían podido formar estructuras complejas como galaxias, estrellas, planetas o seres vivos y entonces no estaríamos aquí hablando de este asunto. Este tipo de argumentos resultan completamente insuficientes para muchos físicos que afirman que la verdadera ciencia debe ser predictiva. Sin embargo físicos de la talla de Steven Weinberg o John D. Barrow han considerado con seriedad la utilidad del principio antrópico. En la ciencia moderna existen otros ejemplos de teorías fundamentales que apenas tienen carácter predictivo como es el caso de la Teoría de la Evolución de Darwin que, aún siendo capaz de explicar una cantidad abrumadora de fenómenos, es esencialmente impredictiva.

**Figura 7.** Si las dimensiones extra tuvieran el tamaño apropiado es posible que se produjeran mini agujeros negros en el acelerador LHC (Large Hadron Collider) que está en construcción en la actualidad en el CERN.

## 5. Nuestro Universo como una 3-brana: más allá del paradigma de la compactificación

En todo caso todavía cabe la posibilidad de preguntarse sobre cuál es la estructura del estado $S$ en el que nos ha tocado vivir. Una interesante posibilidad que fue propuesta hace unos años por Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali es que nuestro universo sea una especie de 3-brana, que se encontraría situada en un espacio de dimensión mayor $D=4+d$. Por algún mecanismo no especificado, las partículas ordinarias se encontrarían confinadas en esta 3-brana, pero la gravitación se esparciría por el espacio multidimensional de las dimensiones extra compactificadas $B_d$. Lo más interesante de este escenario es que en él la escala fundamental de la gravitación no es ya la masa de Planck $M_P$, sino otra escala $M_D$, estando ambas relacionadas mediante la ecuación $M_P^2 = V(B_d)\, M_P^{2+d}$, donde $V(B_d)$ representa el volumen del espacio de las dimensiones extra. Esta ecuación hace posible que $M_D$ sea mucho menor que $M_P$, incluso del orden del TeV, permitiendo por tanto que la interacción gravitacional sea tan intensa como las demás interacciones a partir de esta energía. Además, a diferencia de la compactificación de tipo Kaluza-Klein, el tamaño característico $L$ de $B_d$ sería muchísimo mayor que $l_P$. Por ejemplo, tomando $M_D = 1$ TeV, $L$ variaría desde una fracción de mm para $d = 2$ hasta alrededor de un fermi para $d = 6$, (el caso $d = 1$ está descartado porque el efecto que produciría sobre la Ley de Newton estaría en contradicción con nuestras observaciones del sistema solar); incluso en algunos modelos introducidos posteriormente por Randall y Sundrum, el tamaño de la dimensión extra podría llegar a ser infinito. Si este escenario tiene algo que ver con la realidad se abriría la posibilidad de estudiar interacciones gravitacionales en el futuro acelerador que está en construcción actualmente en el CERN, el llamado *Large Hadron Collider* (LHC), que hará colisionar protones a una energía en el sistema centro de masas de 14 TeV, y que empezará a funcionar en 2007, si todo va bien. Así podría contemplarse la producción de gravitones en este acelerador. Sin embargo

más fascinante aún es la posibilidad sugerida en 2001 por Dimopoulos y Landsberg de producir mini agujeros negros (MAN), es decir agujeros negros con masas $M$ mucho menores que $M_P$. Los agujeros negros multidimensionales con simetría esférica tienen un radio de Schwarzschild $R_D$, que viene dado en este contexto por $R_D^{1+d} = g_d L^d M/M_P^2$, donde $g_d$ es un cierto número del orden de la unidad. Por tanto los MAN son típicamente más pequeños que el espacio de las dimensiones extra. En una primera aproximación, la sección eficaz de producción de estos objetos sería simplemente $\sigma = \pi R_D^2$. Un simple cálculo muestra entonces que MAN de masas del orden de hasta 5 TeV, para $M_D$ del order del TeV, se producirían en el LHC de forma masiva, convirtiendo esta máquina en una verdadera factoría de mini agujeros negros. Una vez producidos, estos MAN se desintegrarían rápidamente, tras perder su momento angular mediante la radiación de gravitones, a través del mecanismo de radiación de Hawking, emitiendo toda suerte de partículas con un espectro térmico. El estudio de esta radiación podría proporcionar una información valiosísima sobre el número de dimensiones extra y muchos otros aspectos de la gravitación en un régimen completamente desconocido hasta ahora.

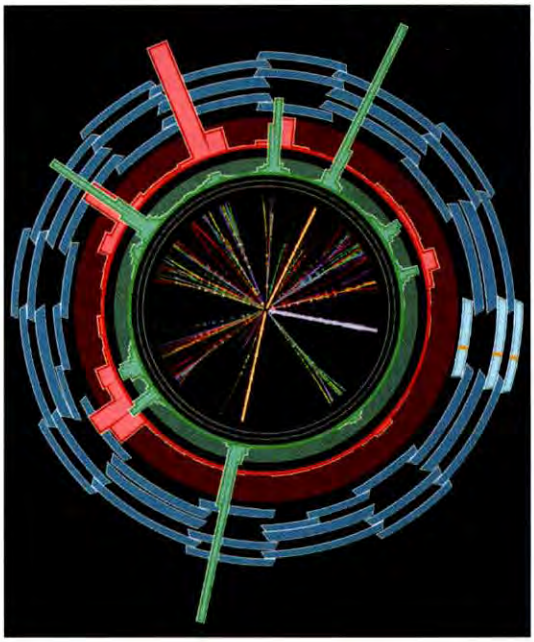

**Figura 8.** Simulación de un suceso en el detector ATLAS del colisionador de protones LHC (CERN), en el que se habría producido e inmediatamente desintegrado un mini agujero negro.

En conclusión, podemos decir que hoy por hoy es difícil determinar si las dimensiones extra forman o no parte de la naturaleza. Sin embargo, es interesante observar cómo una gran cantidad de los desarrollos teóricos realizados en las últimas décadas han requerido la introducción de estas dimensiones de una forma u otra. Su potencial unificador y su belleza, así como la posibilidad de ser exploradas experimentalmente en un futuro próximo, siguen generando la misma fascinación que en su momento produjeron al propio Einstein.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a Katja Waidelich y Felipe Llanes su ayuda en la preparación de este artículo y el soporte económico de los proyectos FPA 2004-02602 y BFM2002-01003. A. D. agradece a la CERN Physics Theory Division su hospitalidad durante la realización de la parte final de este artículo.

## Bibliografía

[1] Brian Green, *The Elegant Universe*, W. W. Norton (1999).
[2] John Ellis, *Einstein's quest for unification*, Physics World, January (2005), p.56.
[3] Thomas Banks, The Cosmological Constant Problem, *Physics Today*, Vol. **57**, No. 3, p.46, March (2004).
[4] Antonio Dobado y Alberto Galindo, *Los números y los quanta*, Horizontes Culturales: Las Fronteras de la Ciencia 2000: Año Mundial de las Matemáticas, p. 217, Espasa-Calpe (2002).
[5] Raphael Bousso and Joseph Polchinski, *The String Theory Landscape*, *Scientific American*, Vol. **291**, No. 3, p.60, September (2004).
[6] Steven Abel and John March-Russell, *The search for extra dimensions*, Physics World, November (2000), p. 39.
[7] Bernard J. Carr and Steven B. Giddings, Quantum Black Holes, *Scientific American*, Vol. **292**, No. 5, May (2005).

The official string theory Web site: www.superstringtheory.com/.

**Antonio Dobado y Antonio López Maroto**
*están en el Departamento de Física Teórica de la Universidad Complutense de Madrid*

# LIBROS Y PUBLICACIONES RECIBIDOS

- **Física para la ciencia y la tecnología. Vol. 1.** Editorial Reverté. Paul A. Tipler. 2005, 581 pp.
- **Problemas resueltos de teoría de la Relatividad Restringida.** Rolando Pérez Álvarez. UNED Ediciones. 2005, 215 pp.
- **Transfer Matrix,** Green Function and related techniques. Rolando Pérez-Álvarez, Federico García Moliner. Universitat Jaume I. 2005, 205 pp.
- **Torsores. Ricardo López Rodríguez.** Ediciones Tébar. 2005, 136 pp.
- **El libro del Big Bang**. Craig J. Hogan. Alianza Editorial. 2005, 219 pp.
- **Arquímedes. Tratados I. Comentarios.** Editorial Gredos. 2005, 438 pp.
- **Historia de la Física. De Arquímedes a Einstein.** Agustín Udías Vallina. Editorial Síntesis. 2005, 302 pp.
- **La investigación del Grupo Especializado de Termodinámica de las Reales Sociedades Españolas de Física y Química. Año 2004.** José A. Ibañez Mengual, Ramón P. Valerdi Pérez, José A. García Gamuz. 2004, 261 pp.
- **Laboratorio virtual de Óptica.** M.ª Luisa Calvo, Tatiana Alieva, José A. Rodrigo, Daniel Rodríguez y Timour Aliev. Delta publicaciones. 2004, 185 pp.